SISTEMAS DIFERENCIALES BIDIMENSIONALES

3.1 Escriba los siguientes sistemas diferenciales bidimensionales con coeficientes constantes en forma matricial:

(a) $\begin{cases} x'(t) = x(t) + 3y(t) + 2t \\ y'(t) = 5x(t) + 3y(t) - 3 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + 2y(t) + 3t \\ y'(t) = 2x(t) + y(t) + e^{-t} \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x'(t) = y(t) - e^{t} \\ y'(t) = 3x(t) + 4y(t \end{cases}$

3.2 Las funciones dadas en los siguientes apartados son soluciones de un sistema $X'(t) = AX(t)$. Compruebe, usando el wronskiano, que son linealmente independientes en el intervalo $(-\infty, \infty)$:

(a) $X_1(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}$, $X_2(t) = \begin{pmatrix} 3e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{pmatrix}$ (b) $X_1(t) = \begin{pmatrix} e^{t} \\ -e^{t} \end{pmatrix}$, $X_2(t) = \begin{pmatrix} (2+8t)e^{t} \\ (6-8t)e^{t} \end{pmatrix}$

3.3 Sean $x = x(t)$ e $y = y(t)$. Halle la expresión general de todas las soluciones reales de los siguientes sistemas homogéneos:

(a) $\begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = 5x + 3y \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = 9x - 3y \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x' = 2x + 8y \\ y' = -x - 2y \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x' = -x + 3y \\ y' = -3x + 5y \end{cases}$ (e) $\begin{cases} x' = 6x - y \\ y' = 5x + 2y \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 4x + 3y \end{cases}$

3.4 Halle la solución general (soluciones reales) de los siguientes sistemas no homogéneos, usando el método de similitud para encontrar una solución particular del sistema completo.

(a) $X'(t) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ (b) $X'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} -2t^2 \\ t+5 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{cases} x' = x + 3y + 12t - 11 \\ y' = 5x + 3y - 3 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x' = 2y + e^{t} \\ y' = -x + 3y - e^{t} \end{cases}$ (e) $\begin{cases} x' = 2x + y - e^{t} \\ y' = 3x + 4y - 7e^{t} \end{cases}$

3.5 Sean $x = x(t)$ e $y = y(t)$. Halle la solución general (soluciones reales) de los siguientes sistemas, usando el método de variación de las constantes para encontrar una solución particular del sistema completo.

(a) $\begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = -x + \cot t \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x' = 3x - 3y + 4 \\ y' = 2x - 2y - 1 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x' = 3x - y + \dfrac{1}{t^2} \\ y' = 9x - 3y + \dfrac{1}{t^3} \end{cases}$

(d) $X'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} e^{t}\cos t \\ e^{t}\,\mathrm{sen}\, t \end{pmatrix}$ (e) $X'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos t} \\ 0 \end{pmatrix}$

3.6 Resuelva los siguientes problemas de Cauchy:

(a) $\begin{cases} x'(t) = y(t) + 2e^{t} \\ y'(t) = x(t) + t^2 \\ x(1) = 0;\ y(1) = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} X'(t) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 4e^{2t} \\ 4e^{4t} \end{pmatrix} \\ X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$